

数学科学習指導案 「正多角形の対角線の性質と曲面への射影」(課題学習)

対 象： 6 学年 E (理系), A (特進), S (体育科)
(女子 12 名)

日 時： 2008 年 2 月 13 日 (水) 第 1・2・3・4 校時

場 所： CALL 教室

指導者： 小野田 啓子

1. 単元名 「正多角形の対角線の性質と曲面への射影」(課題学習)

2. 単元設定の理由

(1) 単元の教材観

円周上を n 等分した点を順に結ぶと、頂点の数が n の正多角形ができる。正多角形の角や辺に関して調べてみてもおもしろい事柄がたくさんあるが、今回は対角線に注目して興味深い様々な性質を調べてみることにした。正多角形は、小学生から高校生まで扱うことができる題材で、数学的にとてもきれいな性質を見つけることができるなど、非常におもしろい教材であると感じている。

本授業では、手で描いて調べることも大切な方法だが、コンピュータでなければ見つけることができない性質に触れて、様々なグラフを描いてみることでコンピュータの有用性を感じつつその良さを活用した展開を行いたいと思った。このような経験を通して、生徒に、問題解決のために幾つかの方法を用いて積極的に調べる態度を養ってもらいたいと考える。

また、今回は多くの生徒にとって苦手と感じる空間概念を身近に感じてもらう試みとして、3次元 GRAPES を使って、正多角形の対角線を使って描いた 2 次元平面上の図を 3 次元の球面上に射影することを行い、数学を活用する体験をしてもらいたいと考えている。射影は、日常誰もが使っている地図に代表されるように、身近で使われている数学である。地球儀を平面的な地図に書き換えるためには、数学が必要である。今回は、その逆の平面上に描いた直線群を、球面上に「正射図法」、「心射図法」、「平射図法と視点の位置を逆にした図法」の 3 つの方法で射影して立体めがねと交差法を使って観察してみたいと思う。空間への射影も中学あるいは高校数学を用いて描くことができるが、実際の計算についてはさらに興味のある生徒への課題とし、数学を用いることで興味ある発展ができることを知って数学の一面に関心を持ってもらいたいと思う。

(2) 生徒の実態

今回の対象生徒は、高校 3 年生普通科進学コース理系生徒と特進理系、体育科の希望者である。数学の理解の程度としては、生徒間にかかなりの差がある。それぞれの進路としては、児童学部小学校教員養成コース、理学部、栄養、看護学部等の理系方面に進む生徒を含み多方面に渡る。中には、数学への興味関心が高く、将来は教員になって算数や数学を教えたいと志望している生徒もいる。今回の授業のねらいは、卒業を控えている生徒それぞれに数学の面白さに触れてもらいたいということである。GRAPES は、進学理系は昨年度「三角関数」、今年度「微分関数の増加減少」で普通教室で教員による提示で使ったことはあるが、自分で操作をした経験はない。特進理系は、生徒各自が操作をしたことがあり、今年度数学 C「曲線」で普通教室において提示型で数時間使っている。体育科の生徒は初めてである。

3. 単元の指導目標¹⁾

正多角形の対角線を描くプログラムを各自に作らせ、頂点の数 n を変えて描かれる対角線がもつ性質について、観察し発見した事を数学的に考察することを目標とする。

内容としては、正 8 角形、正 12 角形、正 18 角形の 3 本以上の対角線が 1 点で交わることの不思議さを取り上げ、部分的ではあるが数学的に証明を行って理由を明らかにする。

次に、対角線を全部描くのではなく、その内の一部分だけを描く、例えば頂点を一定の速さで進ませたときの対角線がきれいな包絡線を描くことを見つけ、数学の芸術的な面に触れる。

さらに、「偶数角数」の正 n 角形の 2 つの頂点を反対向きに 1 : 2 の速さの比で動かしたとき、その 2 点を結んだ線分が全て 3 本ずつ 1 点で交わることを確かめる。さらに、対角線を直線として描いたときにできる包絡線と 2 点が動く速さの比との関係について考察する。

最後に、平面に描いた対角線の図を、空間の球面上にいくつかの異なる方法で射影して、平面と曲面上の図の関係を観察を通して考える。さらに、興味のある生徒に対して、射影の方法を考えてみるよう促す。

4. 単元の指導計画

- 1 時間目 GRAPES の操作方法と正多角形の対角線の描画。
- 2 時間目 正多角形の対角線の性質。
- 3 時間目 対角線の一部を描いた時にできる包絡線の形と、正多角形の 2 頂点をお互いに反対向きに 1 : 2 の速さの比で動く点を結んだ線分の性質。
- 4 時間目 正多角形の対角線の球面への射影。

5. 学習計画

(1) 各時間の目標

[1 時間目]

GRAPES の起動と正 n 角形の描画、スクリプト (GRAPES 内のプログラム) を使って自動的に正 n 角形の対角線を描く。

[2 時間目]

n の値を $n=6$ から増やして対角線の様子を観察する。交点に注目させ、3 本以上の対角線が多く交わる正多角形を見つける。

3 本以上の対角線が交わる理由を考える。一つの例で証明をする。

2 本の対角線しか交わらないのは、 n の値がどのようなときか調べる。

3 本の対角線が交わるための必要十分条件として、弦に関するチェバの定理が成り立つことが知られているが²⁾、ここでは生徒が見つけた条件を元にまとめる。

[3 時間目]

全部の対角線を描くのではなく、片方の点をもう一方の点に対して一定の速さで動かしたときの 2 点を結んだときの対角線の様子を観察する。各自条件を変えて、直線群の接線が描く曲線 (包絡線) を調べる。³⁾

偶数角数の正 n 角形の頂点を反対向きに 1 : 2 の速さの比で動く点を結んだ線分の性質を調べる。⁴⁾

線分を直線にして描いたときにできる包絡線を、比の値を 1 : $-m$ (m は正の整数) と

して描いて m の値との関係を調べる。

包絡線が、2つの頂点を結んだ線分を $1:m$ (m は実数) の比に、 $m>0$ のときは内分、 $m<0$ のときは外分した点の軌跡となっていることを確かめる。⁵⁾(* 生徒の理解状況によっては、扱うと面白いと思うが今回は省く。)

[4 時間目]

地図の作図法のうち、正射図法、心射図法、平射図法の3つについて解説をする。

3時間目に描いた $1:-2$ の速度の比で頂点が動くときの対角線の図を、3次元 GRAPES を使って、球面に正射図法、心射図法、平射図法と視点の位置を逆にした方法で射影してできた図⁶⁾を、立体メガネと交差法を使って観察する。

正射図法の射影方法を考える。

対角線の図や、平射図法の視点の位置を変えた場合の射影を各自描いて調べる。

興味のある生徒には、心射、平射図法の射影方法を考えてみるよう促す。

(2) 各時間の展開

[1 時間目の展開]

経過	学習項目	生徒の学習活動	指導上の留意点	評価観点
導入	正 n 角形の対角線	(1) 正 n 角形 ($n=5, 6, 7, 8$) を印刷したプリントを配布。正 n 角形の対角線を描く。 n が大きくなると対角線の数が増える。 (2) 本時の課題 正 n 角形の対角線を自動的に描かせてみよう	対角線を正しく描くことができるか。 本時の目的を把握させる。	知識・理解 表現・処理 関心・意欲・態度
展開	GRAPES の起動 正 n 角形の頂点を取る スクリプトを書く	(3) GRAPES を起動させる。「正 n 角形を描く .gps」を開く。(範囲と残像濃さを調整済み) (4) 半径 1 の円を描く。(プリントで手順を確認させる。) (5) 正 n 角形の頂点を取る。 点 P を $\text{roll}(360^\circ \times k/n)$ 、点 Q を $\text{roll}(360^\circ \times m/n)$ として、2点 PQ を線分で結ぶ。線分 PQ の残像を残すようにする。 (6) 正 n 角形を描く。 (5) k や m を動かして、対角線を描く。 (6) スクリプト機能を使ってパラメータを自動的に動くようにする。点 Q を 1 周動くようにして、対角線を描く。 (7) 点 P も動くようにスクリプトを書き換えて、対角線を描く。 (8) n の値を変えて対角線を描く。 *途中で完成できなくなった生徒には「正 n 角形を描く _作業後.gps」を開かせる。	起動を確認する。 入力ができない生徒の補助をする。 GRAPES を使って描く時間を確保する。 $n=100$ 位の値の図も描かせてみる。	知識・理解 表現・処理 関心・意欲・態度 知識・理解 表現・処理

まとめ	対角線の描画	(11) スクリプトによって様々な正 n 角形の対角線を自動的にきれいに描くことができる。		関心・意欲・態度
-----	--------	---	--	----------

〔 2 時間目の展開 〕

経過	学習項目	生徒の学習活動	指導上の留意点	評価観点
導入	$n=6$ からの対角線	(1) $n=6$ からの正多角形の対角線を、GRAPES で描いて観察する。生徒、教師とも「正 n 角形を描く 完成版.gps」を開く。(前時に生徒が作成したファイルを見やすくしたもの。) (2) 本時の課題 正多角形の対角線の性質を調べる	n の値が小さな値から調べさせる。	関心・意欲・態度
展開	対角線の交点 正 12 角形の性質 3 本以上の対角線が 1 点で交わらない場合	(3) $n=6$ から 18 位までを描いて、対角線について気付くことを見つけさせる。 (4) 正 12 角形、正 18 角形の対角線について、3 本以上の対角線が 1 点で交わっていることを見つける。 (5) 正 12 角形の対角線で、3 本以上の対角線が交わる理由を考える。 (6) 一つの例で証明を考える。 (7) 3 本以上の対角線が 1 点で交わらないのは、 n がどのような値のときか調べる。	対角線の交点に着目させる。 図をもとに理由を考えさせる。 1 辺に対する円周角、中心角に注目させる。	考え方 関心・意欲・態度 考え方 表現・処理 知識・理解 関心・意欲・態度
まとめ	対角線の交点	(7) 正多角形の 3 本以上の対角線が交わる時には、対角線によって二等辺三角形など対称性が高い図形ができていないことなど特徴をまとめる。	n の偶奇など、生徒が気付いたことを取り上げる。	考え方 表現・処理

〔 3 時間目の展開 〕

経過	学習項目	生徒の学習活動	指導上の留意点	評価観点
導入	対角線の一部を描く	(1) 本時の課題 m の値を $2k, 3k, \dots$ として対角線の一部を描いてできる模様を調べよう 教師「正 n 角形対角線変化版_1.gps」を開く。プリントに $m=2k$ の場合の対角線を描かせる。	m と k の関係を、具体的に生徒に鉛筆で描かせて説明する。	関心・意欲・態度 知識・理解
展開	$m=ak(a>0)$ の場合	(2) 「正 n 角形_弦の包絡線.gps」を開く。点 Q のパラメータ m を「 ak 」に変えてある。	a にいろいろな値を代入	表現・処理 関心・意欲

	<p>$m=ak(a<0)$ の場合</p> <p>直線の包絡線</p> <p>線分 PQ を $1:a$ に内分・外分した点</p>	<p>(3) $a>0$ の値をいろいろと代入して対角線を描く。フルカラーでも描いてみる。</p> <p>(4) $a<0$ の値をいろいろと代入して対角線を描く。</p> <p>(5) 「正 n 角形対角線_直線版.gps」を開く。基本図形の「線分」を「直線」に変えて、$a>0$、$a<0$ のときの図を描く。(直線の包絡線については、模様を描いていく中で生徒が自然に気付く程度に扱う。プリント最後)</p> <p>(6) 点 P、Q の速度の比を $1:a$ (a は実数) としたとき、直線 PQ の包絡線は、$a>0$ のときは線分 PQ を内分する点の軌跡、$a<0$ のときは外分する点の軌跡となることを見つける。</p> <p>(7) 包絡線が線分 PQ を $1:a$ の比で内分・外分した点の軌跡と一致することを確認する。</p> <p>* (6)、(7) は生徒の状況によって扱う。今回は、無理に扱うことはしない。</p>	<p>して、きれいな模様が描ける値を見つけさせる。</p> <p>$n =$ 偶数のとき、$m = -2$ で 3 本の対角線が全て 1 点で交わることを取り上げたい。</p> <p>内分・外分点の公式を確認する。</p>	<p>・態度</p> <p>考え方 関心・意欲・態度 知識・理解</p> <p>考え方</p> <p>考え方 表現・処理</p>
まとめ	対角線の直線群が描く図形	(10) 対角線の一部を描いた時にできる包絡線がいろいろな形になることを確認する。	対角線が描くきれいな図形を鑑賞するつもりでよい。	知識・理解

〔4 時間目〕

経過	学習項目	生徒の学習活動	指導上の留意点	評価観点
導入	地図の作図法	<p>(1) 地球儀から平面の地図を作図する方法の確認</p> <p>(2) 本時の課題</p> <p>平面に描いた対角線の図を、球面に射影するとどうなるか描いて観察してみよう。</p>	3 つの作図法を実際に見て体験してみようと、動機に繋げる。	<p>知識・理解</p> <p>関心・意欲・態度</p>
展開	球面への射影	<p>(3) 3 次元 GRAPES を起動させる。</p> <p>(4) 3 時間目に描いた $1:-2$ の速度の比で頂点が動くときの対角線の図を、球面に「正射図法」、「心射図法」、「平射図法と視点の位置を逆にした方法」で射影して見る。</p> <p>「正射図法.gp3」「心射図法.gp3」「平射図法の応用(視点上).gp3」を順に開く。</p> <p>(5) 射影した図を立体メガネを使う方法と、裸</p>	<p>最初は 3 次元 GRAPES による空間図形表示に慣れる。</p> <p>生徒の活動時間を十分に確保する。</p> <p>立体視の 2</p>	<p>関心・意欲・態度</p> <p>関心・意欲・態度</p> <p>考え方</p>

		<p>眼による交差法で観察する。</p> <p>(6) 正射図法の方法を考える。はじめに生徒に考えさせ、その後生徒とやり取りをしながらまとめる。</p> <p>(7) u の値を変えて違う対角線の図(平面の図)で射影の図を描いてみる。</p> <p>(8) 興味のある生徒には、他の射影の方法を考えてみるよう促す。</p>	<p>つの方法の違いに簡単に触れる。</p> <p>正射図法の作図法について、ヒントを基に考えさせる。</p>	<p>表現・処理</p> <p>関心・意欲・態度</p> <p>知識・理解</p> <p>考え方</p>
まとめ	数学の活用	<p>(8) 空間図形を動かして見た体験について、感想をまとめる。</p> <p>(9) 身の回りにある地図の作図やその逆の作図に、知っている数学を活用することができる。今回の経験を通して、生活や芸術など身の回りのものにも、数学が活用されていることに気付いてもらいたい。</p>	<p>数学を活用することの良さを生徒が感じることができるようまとめる。</p>	<p>考え方</p> <p>関心・意欲・態度</p>

(3) 板書計画

* プリント参照

【参考文献】

- 1) 1～3時間目の内容は、数学教育(明治図書)20082月号 No.603「GRAPESのある風景 正多角形の対角線 -」GRAPESの仲間たち(石谷優行,小野田啓子,友田勝久,堀部和経) pp.78-83をもとにしている。
- 2) 「正18角形の対角線」
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/diagonal18.pdf>
- 3) 数学教育(明治図書)「GRAPESのある風景」WEBページ
http://www.geocities.jp/tomodak_grapes/index.html
[2月号] http://www.geocities.jp/tomodak_grapes/volume24.html
- 4) 「正偶数角形の頂点を1:(-2)の速さで移動する2点を結んだ直線の交点について」
http://horibe.jp/PDFBOX/even_polygon.pdf
「異なる速さで円周上を回る2点を結ぶ弦が作る模様」
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/index.html#chord>
「円周上を1:2の速さで逆方向に回る2点を結ぶ直線の交点について」
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/index.html#deltoid>
「円周上を1:2の速さで逆方向に回る2点を結ぶ直線の諸性質に関する代数的考察」
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/index.html#deltoid2>
- 5) 円周上を1:n(nは正の整数)の速度比で反対方向に回る2点を結ぶ直線が描く包絡線と、2点を1:nの比に外分する点の軌跡について
http://www.seitoku.fujishiro.ibaraki.jp/info/math/kyouzaikenkyuu/hourakusen_bunten.doc
- 6) 数学とその周辺「DOME」25階
<http://horibe.jp/DOME.HTM>